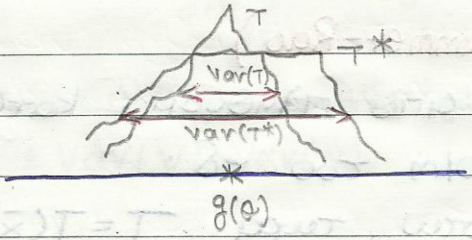
Σε γραφικό επίπεδο ο ορισμός που είδαμε προηγουμένως είναι:



Ερωτήματα

1ο) Είναι ο ΑΟΕΔ εκτιμητής μοναδικός;

2ο) Πως μπορώ να βρώ τον ΑΟΕΔ εκτιμητή;

Θεώρημα: Εάν ο ΑΟΕΔ εκτιμητής υπάρχει, τότε είναι μοναδικός.

Για να απαντηθεί το ερώτημα ii, έχουμε τις εξής δύο μεθόδους:

Ⓐ ΜΕΘΟΔΟΣ I: Ανισότητα Cramer-Rao

Ⓑ ΜΕΘΟΔΟΣ II: Θεώρημα Lehmann-Scheffé

Ⓐ Συνθήκες κανονικότητας

I. Ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$

II. Η από κοινού κατανομή του τδ $f(x,\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$ έχει σύνολο θετικότητας ανεξάρτητο της $\theta \in \Theta$.

Δηλ. $S=\{(x_1,\dots,x_n) : f(x,\theta)>0\}$ ανεξ. του θ

III. Για κάθε $x \in S$ και $\theta \in \Theta$ η $\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη

IV. Το $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial\theta} f(\bar{x},\theta)\, d\bar{x} = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{R}^n} f(\bar{x},\theta)\, d\bar{x}\ (=0)$

V. Αν $T=T(\bar{x})$ μία στατιστική συνάρτηση

$$\int_{\mathbb{R}^n} T(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial\theta} f(\bar{x},\theta)\, d\bar{x} = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{R}^n} T(\bar{x})\cdot f(\bar{x},\theta)\, d\bar{x}$$

VI. Εάν $I_x(\theta)$ είναι η μέση τιμή

$$I_x(\theta)=E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\bar{x},\theta)\right]^2=\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\bar{x},\theta)\right]^2\cdot f(\bar{x},\theta)\, d\bar{x}$$

τότε $0 \le I_{\bar{x}}(\theta) < \infty$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ανισότητα Crammer-Rao)

Έστω τδ $x_1, x_2, \dots, x_n$ από πληθυσμό κατανομής $f(x,\theta)$ και από κοινού κατανομή του τδ:

$f(\bar{x},\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$. Έστω τώρα $T=T(\bar{x})$ ένας αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$. Εάν ισχύουν οι συνθήκες κανονικότητας I-VI τότε:

$$Var(T(\bar{x})) \ge \frac{(g'(\theta))^2}{I_{\bar{x}}(\theta)}$$

Απόδειξη

Παίρνουμε:

$$E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\bar{x},\theta)\right] = \int\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\bar{x},\theta)\right) f(\bar{x},\theta)\, d\bar{x} =$$

$$= \int \frac{\partial/\partial\theta\, f(\bar{x},\theta)}{\cancel{f(\bar{x},\theta)}} \cancel{f(\bar{x},\theta)}\, d\bar{x} = \int \frac{\partial}{\partial\theta} f(\bar{x},\theta)\, d\bar{x} \overset{(IV)}{=} \frac{\partial}{\partial\theta} \int f(\bar{x},\theta)\, d\bar{x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta} 1 = 0 \quad (1)$$

και παιρναμε τωρα

$$Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\bar{x},\theta)\right) \underset{=E(W^2)-(EW)^2}{\underline{Var(W)=}} E\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\bar{x},\theta)\right)^2 - \ldots$$

$$-\left[\left\{E\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log(\bar{x},\theta)\right)\right\}^2 \xrightarrow[(1)]{(VI)} Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\bar{x},\theta)\right) = I_{\bar{x}}(\theta) \quad (2)\right.$$

Επειτα θεωρω τη συνδιακύμανση

$$Cov\left(T(\bar{x}), \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\bar{x},\theta)\right) \underset{=E(VW)-(EV)(EW)}{\underline{\overset{Cov(V,W)=}{\qquad}}}$$

$$= E\left(T(\bar{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\bar{x},\theta)\right) - E(T(x)) \cdot \left\{E\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\bar{x},\theta)\right)\right\} =$$

$$= \int T(\bar{x}) \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\bar{x},\theta)\right) f(\bar{x},\theta)\, d\bar{x} =$$

$$= \int T(\bar{x}) \cdot \frac{\partial/\partial\theta\, f(\bar{x},\theta)}{\cancel{f(\bar{x},\theta)}} \cancel{f(\bar{x},\theta)}\, d\bar{x} =$$

$$= \int T(\bar{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} f(\bar{x},\theta)\, d\bar{x} \overset{(V)}{=} \frac{\partial}{\partial\theta} \int T(\bar{x}) f(\bar{x},\theta)\, dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta} E(T(\bar{x})) = \frac{\partial}{\partial\theta} g(\theta) = g'(\theta)$$

Απο ανισοτητα cauchy-schwartz

$$Cov^2(V,W) \le Var(V) \cdot Var(W)$$

Ετσι,

$$(g'(\theta))^2 = Cov^2\left(T(\bar{x})\ \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\bar{x},\theta)\right) \le Var(T(x)) . Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\bar{x},\theta)\right)$$

$$\overset{(2)}{=} Var(T(\bar{x})) \cdot I_{\bar{x}}(\theta) \Rightarrow Var(T(\bar{x})) \ge \frac{(g'(\theta))^2}{I_{\bar{x}}(\theta)}$$

Παρατηρήσεις:

1) Κάτω φράγμα της ανισότητας Cramer-Rao, είναι το:

$$K.\Phi_{CR} = \frac{(g'(\theta))^2}{I_{\bar{x}}(\theta)}$$

2) $I_{\bar{x}}(\theta)$: μέτρο πληροφορίας του Fisher, και εκφράζει το ποσό της πληροφορίας που περιέχεται στο τδ $x_1, \dots, x_n$ για την θ.

3) $I_{\bar{x}}(\theta) = n I_x(\theta)$, $I_x(\theta) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta)\right)^2 = \int\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta)\right]^2 f(x,\theta)\,dx$

Απόδειξη:

3) $I_{\bar{x}}(\theta) \overset{(VI)}{:=} E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\bar{x},\theta)\right)^2 = Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(\bar{x},\theta)\right) =$

$= Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i,\theta)\right) \overset{\text{ανεξ}}{=}$

$= \sum_{i=1}^{n} Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i,\theta)\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i,\theta)\right]^2 =$

$= \sum_{i=1}^{n} I_{x_i}(\theta) \underset{\text{ισον.}}{\overset{x_i}{=}} n I_x(\theta)$

4) Λόγω της (3) το κάτω φράγμα:

$$K.\Phi_{CR} = \frac{(g'(\theta))^2}{n I_x(\theta)} \quad (*)$$

5) Αποδεικνύεται ότι:

$$I_x(\theta) := E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta)\right)^2 = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x,\theta)\right)$$

Απόδειξη

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta}\log f(x,\theta)\right) = \dots = I_x(\theta)$$

Εφαρμογή Ανισότητας Cramer-Rao εύρεσης ΑΟΕΔ εκτιμητών

<u>1ο ΒΗΜΑ:</u> Υπολογισμός $K\Phi_{C.R} = \dfrac{(g'(\theta))^2}{I_{\bar{x}}(\theta)} = \dfrac{(g'(\theta))^2}{n I_{\bar{x}}(\theta)}$

<u>2ο ΒΗΜΑ:</u> Προσπαθώ να βρώ εκτιμητή (αμερόληπτο) της $g(\theta)$ με διακύμανση ίση με $K\Phi_{CR}$

Παράδειγμα #1:

Έστω τδ $x_1, x_2, \dots, x_n \sim Poisson(\theta)$, $\theta > 0$

Να βρεθεί ΑΟΕΔ της θ.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Αφού το τδ προέρχεται από $Poisson(\theta)$, $\theta>0$ τότε η κατανομή του πληθυσμού είναι η κατανομή Poisson. Δηλ. $p(x,\theta) = \dfrac{e^{-\theta}\cdot\theta^x}{x!}$, $x=0,1,\dots$, $\theta>0$

<u>ΒΗΜΑ 1ο:</u>

$$K\Phi_{CR} = \frac{(g'(\theta))^2}{n I_x(\theta)} \quad \frac{g(\theta)=\theta}{} \quad \frac{1^2}{n I_x(\theta)} = \frac{1}{n I_x(\theta)} \quad (1)$$

$$I_x(\theta) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(x,\theta)\right)^2 \quad (2)$$

$$\log p(x,\theta) = \log\left(\frac{e^{-\theta}\cdot\theta^x}{x!}\right) = -\theta + x\log\theta - \log x!$$

Διαφορίζουμε

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(x,\theta) = -1 + \frac{x}{\theta} = \frac{x-\theta}{\theta}$$

$$(2): I_x(\theta) = E\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2}E(x-\theta)^2 \quad \frac{Var(x)=E(x)=\theta}{Var(x)=E(x-Ex)^2=E(x-\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{\theta^2}Var(x) = \frac{1}{\theta^{2}}\theta = \frac{1}{\theta}$$

Συνεπώς η (1) είναι:

$$K\Phi_{CR} = \frac{1}{n/\theta} = \frac{\theta}{n}$$

<u>ΒΗΜΑ 2ο:</u> Αρκεί νδ έναν εκτιμητή αμερόληπτο T, της θ με $Var(T) = K\Phi_{CR} = \dfrac{\theta}{n}$.

Θεωρούμε το $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ όπου $E(X) = \bar{X}$ αμερόληπτο του θ

Επιπλέον, γνωρίζω πάντα ότι

$$Var(\bar{X}) = \frac{Var(\text{πληθυσμού})}{n} = \frac{\theta}{n}$$

Συγκεντρωτικά

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \bar{X} \text{ αμερ. του } \theta \\ 2.\ Var(\bar{X}) = K\Phi_{CR} = \frac{\theta}{n} \end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{X} \text{ ΑΟΕΔ της } \theta.$$

Παράδειγμα #2

Έστω τδ $x_1, \ldots, x_n$ απο διωνυμική κατανομή $B(1,p)$

Να βρεθεί ΑΟΕΔ της p

ΛΥΣΗ

Αφού τδ είναι απο $B(1,p)$ τότε $E(X) = p$, $Var(X) = p(1-p)$

1ο ΒΗΜΑ

$$K\Phi_{CR} = \frac{(g'(\theta))^2}{n I_X(\theta)} = \frac{p'}{n I_X(p)} = \frac{1}{n I_X(p)} \quad (1)$$

$$I_X(p) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log p(x,p)\right) \quad (2)$$

όπου, $p(x,p) = p^x (1-p)^{1-x}$, $x = 0,1$, $0<p<1$

$\log p(x,p) = \log p^x (1-p)^x = x \log p + (1-x) \log(1-p)$

Διαφορίζουμε:

$$\frac{\partial}{\partial p} \log p = \frac{x}{p} - \frac{1-x}{1-p}, \quad \frac{\partial^2}{\partial p^2} \log p = -\frac{x}{p^2} - \frac{1-x}{(1-p)^2}$$

Άρα, (2) είναι:

$$I_X(p) = E\left(\frac{x}{p^2}\right) + E\left(\frac{1-x}{(1-p)^2}\right) = \frac{1}{p^2} \cancel{E(x)}^{p} + \frac{1}{(1-p)^2} (1 - \cancel{E(x)}^{p}) =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p(1-p)} \quad (\text{Μέτρο πληροφορίας του fisher})$$

Άρα, (1) είναι:

$$K\Phi_{CR} = \frac{1}{n/p(1-p)} = \frac{p(1-p)}{n}$$

2ο ΒΗΜΑ: Ο $\bar{x}$ αμερόληπτος της $E(x) = p$

Επίσης, $Var(\bar{x}) = \frac{var(πληθ)}{n} = \frac{p(1-p)}{n} = κφ_{CR}$

Άρα, $\bar{x}$ ΑΟΕΔ της $p = κφ_{CR}$

Μορφή Αμερόληπτου εκτιμητή ώστε η διακύμανσή του να πετυχαίνει το $κφ_{CR}$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω οι συνθήκες κανονικότητας ικανοποιούνται για τον αμερόληπτο εκτιμητή $v = v(\bar{x})$ της $g(\theta)$. Τότε, $Var(v) = κφ_{CR} = \frac{(g'(\theta))^2}{nI_x(\theta)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v = g(\theta) + a(\theta) w$ με $w = \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\bar{x}, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(x_i, \theta)$

Απόδειξη:

Έστω $v = g(\theta) + a(\theta) w$

Αφού v συνδέεται γραμμικά με την w ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson $\rho_{v,w} = \pm 1$ $\left(\rho_{v,w} = \frac{cov(v,w)}{\sqrt{Var v}\sqrt{Var w}} \right)$

Άρα, $\rho_{v,w}^2 = 1 \Rightarrow Cov^2(v,w) = Var(v) \cdot var(w)$ ①

Αλλά, $cov^2(v,w) = cov^2\left(v, \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\bar{x}, \theta)\right) \xrightarrow[Rao]{Cramer} [g'(\theta)]^2$ ②

$Var(w) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\bar{x}, \theta)\right)^2 - \cancel{E\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(\bar{x}, \theta)\right)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow Var(w) = I_{\bar{x}}(\theta) = nI_x(\theta)$ ③

Από τις ①, ②, ③:

$(g'(\theta))^2 = Var(v) \cdot I_x(\theta) \Rightarrow Var(v) = \frac{(g'(\theta))^2}{nI_x(\theta)} = κφ_{CR}$

Αντίστροφα,

Αποδεικνύεται ακολουθώντας τα αντίστροφα βήματα

Παρατήρηση:

Εφόσον $v = g(\theta) + a(\theta) w \Rightarrow w = \frac{1}{a(\theta)} (v - g(\theta)) \Rightarrow$

$\Rightarrow w = \frac{\partial}{\partial\theta} (\log f(x, \theta)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} (\log f(x, \theta)) = k(\theta, n)[v - g(\theta)]$

Συμπέρασμα:

Εάν η w μπορεί να οδηγηθεί στη μορφή $k(\theta, n)(v - g(\theta)) \Rightarrow$

$\Rightarrow v$ ΑΟΕΔ της $g(\theta)$

Παράδειγμα #1

Έστω τδ $x_1, \dots, x_n \sim Poisson(\theta)$.

Να βρεθεί ΑΟΕΔ του θ

ΛΥΣΗ

Αφού $x_1, \dots, x_n$ τδ από Poisson(θ) η από κοινού κατανομή

$$p(\bar{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^{x_i}}{x_i!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(\bar{x}, \theta) = \frac{e^{-n\theta} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}.$$

Άρα, $\log P(x, \theta) = -n\theta + (\sum x_i) \log\theta - \log \prod x_i!$

Άρα, $W = \frac{\partial}{\partial\theta} \log(\bar{x}, \theta) = -n + \frac{\sum x_i}{\theta} = \left(-\frac{n}{\theta} + \sum x_i\right) \frac{1}{\theta} =$

$$= \frac{n}{\theta}\left(\frac{\sum x_i}{n} - \theta\right) = \frac{n}{\theta}(\bar{x} - \theta).$$

Άρα, $\bar{X}$ ΑΟΕΔ του θ.

Παράδειγμα #2

Έστω τδ $x_1, \dots, x_n \sim B(1, p)$

Να βρεθεί ΑΟΕΔ του p

ΛΥΣΗ

Αφού τδ είναι από $B(1,p)$ τοτε $p(x,p) = p^x (1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$, $p \in (0,1)$

$W = \frac{\partial}{\partial p} \log p(\bar{x}, p)$

Έτσι,

$$p(\bar{x}, p) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum x_i} (1-p)^{n - \sum x_i}$$

$$\log p(\bar{x}, p) = \sum x_i \log p + (n - \sum x_i) \log(1-p)$$

$$W = \frac{\partial}{\partial p} \log p(\bar{x}, p) = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{n - \sum x_i}{1-p} =$$

$$= \frac{\sum x_i - p\cancel{\sum x_i} - np + p\cancel{\sum x_i}}{p(1-p)} = \frac{\sum x_i - np}{p(1-p)} = \frac{1}{p(1-p)}(\sum x_i - np) =$$

$$= \frac{n}{p(1-p)}\left(\frac{\sum x_i}{n} - p\right) = \frac{n}{p(1-p)}(\underbrace{\bar{x}}_{v(x)} - p)$$ Άρα, $\bar{X}$ ΑΟΕΔ του p.

Ασκηση / Εργασία:

Έστω τσδ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό των κατανομή $N(\mu, \theta)$ το μ: γνωστο. Να βρεθεί ΑΟΕΔ της θ.

(2ος τρόπος πιο άμεσος)